6. FRAZIONI ALGEBRICHE

6.1 Analogie con Q

Addizione

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{10+6}{15}=\frac{16}{15}$$

$$\frac{5}{4}+\frac{11}{4}=\frac{5+11}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$\frac{5}{42}+\frac{7}{36}=\frac{30+49}{252}=\frac{79}{252}$$

Per determinare il denominatore comune si calcola il mcm tra i denominatori, ad es. con il metodo della scomposizione in fattori primi.

$42=2\bullet 3\bullet 7$

$36=2^2\bullet 3^2$

$mcm(42;36)=2^2\bullet 3^2\bullet 7=252$

$$\frac{5a}{b}+\frac{3x}{2}=\frac{10a+3bx}{2b}$$

$$\frac{5a}{xy}+\frac{8a}{xy}=\frac{5a+8a}{xy}=\frac{13a}{xy}$$

$$\frac{3b}{x}+\frac{4c+b}{y}=\frac{3by+x(4c+b)}{xy}=$$

$$=\frac{3by+4cx+bx}{xy}$$

$$\frac{3x}{ab}+\frac{4x}{a^2bc}+\frac{5x}{a^3b^2}=$$

$$=\frac{3a^2bcx+4abx+5cx}{a^3b^2c}$$

$mcm(ab;a^2bc;a^3b^2)=a^3b^2c$

$$\frac{2x}{5y^2}+\frac{3y}{x}+\frac{8y}{x^2}=$$

$$=\frac{2x^3+15xy^3+40y^3}{5x^2y^2}$$

Sottrazione (attenzione ai segni!)

$$\frac{5x}{y}-\frac{2-x}{x}=\frac{5x^2-y(2-x)}{xy}=\frac{5x^2-2y+xy}{xy}$$

$$y-\frac{5x-2y}{x}=\frac{xy-(5x-2y)}{x}=\frac{xy-5x+2y}{x}$$

Moltiplicazione

$$\frac{3}{4}\bullet\frac{5}{7}=\frac{3\bullet 5}{4\bullet 7}=\frac{15}{28}$$

$$\frac{15}{8}\bullet\frac{14}{25}=\frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{ab}{cd}\bullet\frac{a^2b}{c^4d^2}=\frac{a^3b^2}{c^5d^3}$$

$$\frac{x^2y^3}{m^4n^5}\bullet\frac{m^3n^4p^2}{xy^2z}=\frac{\quad}{\quad}$$

Divisione

$$\frac{4}{5}\div\frac{32}{15}=\frac{4}{5}\bullet\frac{15}{32}=\frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{ab^2}{5c}\div\frac{ab^3}{c^2}=\frac{ab^2}{5c}\bullet\frac{c^2}{ab^3}=\frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{x^4y}{mn}\div\frac{x^3y^2}{m^3n^2}=\frac{x^4y}{mn}\bullet\frac{m^3n^2}{x^3y^2}=\frac{\quad}{\quad}$$

6.2 Semplificazione di frazioni algebriche

Una frazione algebrica è un'espressione del tipo A(x)/B(x), dove A(x) e B(x) sono dei polinomi e B (x) non è nullo.
Le operazioni con le frazioni algebriche sono analoghe a quelle con le frazioni numeriche. È utile anche con le frazioni algebriche lavorare con delle frazioni ridotte ai minimi termini. Iniziamo quindi a vedere come è possibile semplificare una frazione algebrica.
Per poter semplificare una frazione algebrica occorre scomporre sia il numeratore che il denominatore (se possibile!) in prodotti, utilizzando le tecniche di scomposizione viste finora:

la messa in evidenza;
riconoscere dei prodotti notevoli;
la scomposizione in un trinomio tipico.

Esempio 1: con la messa in evidenza. (Usa la riga per tracciare la linea di frazione!)

$$\frac{x^2+2x}{x+2}=\frac{x(x+2)}{x+2}=x$$

$$\frac{5a^2b+ab^2}{5a^2+ab}=$$

$$\frac{cd+2c+4c^2d}{cd}=$$

Esempio 2: riconoscendo i prodotti notevoli.

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}=$$

$$\frac{2x^2-20x+50}{x^2-25}=$$

Esempio 3: scomponendo il trinomio tipico.

$$\frac{a^2+5a+6}{a^2+7a+10}=$$

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-12}=$$

$$\frac{x^2+10x+24}{x^2-5x-36}=$$

Osservazioni:

a(b+2) è considerata più semplice dell'espressione ab+2a;
1+b/a è considerata più semplice dell'espressione (a+b)/a

6.3 Addizione di frazioni algebriche.

Per addizionare o sottrarre delle frazioni algebriche, *occorre ricondurle ad uno stesso denominatore*, poi addizionare o sottrarre i numeratori, analogamente al procedimento utilizzato per le frazioni numeriche.
Se possibile, il risultato va poi semplificato.

Esempi. (Usa la riga per tracciare le linee di frazione!)

$$\frac{a}{2b}+\frac{a+3}{2b}=$$

$$\frac{x+5}{xy}+\frac{x-2}{xz}=$$

$$\frac{3}{a+3}+\frac{a}{a+3}=$$

$$\frac{2}{x^2+8x+16}-\frac{3}{x^2-16}=$$

6.4 Moltiplicazione di frazioni algebriche.

La regola per la moltiplicazione è analoga a quella per le frazioni numeriche. Prima di moltiplicare tra di loro i numeratori e tra loro i denominatori è però utile scomporre sia i numeratori che i denominatori in prodotti e semplificare.
Esempi.

$$\frac{x+5}{x+3}\bullet\frac{x-3}{x+5}=$$

$$\frac{x+5}{x+3}\bullet\frac{6x+18}{4x+20}=$$

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x-5}\bullet\frac{x^2+7x+10}{x^2+4x+4}=$$

$$\frac{x+5}{m^3}\bullet\frac{xm^4}{2x+10}\bullet\frac{2}{3x^2}=$$

6.5 La divisione di frazioni algebriche.

La regola è analoga a quella per la divisione tra frazioni numeriche. Vediamo alcuni esempi.

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}\div\frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}=$$

$$\frac{-2x^2+8x}{3x-3}\div\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}=$$

$$\frac{24x^2z^2m^3}{7a^3b^4}\div\frac{-6xm^4}{35a^2b^3}=$$

$$\frac{1}{3a-3b}\div\frac{2a}{5b-5a}=$$

6.6 Esercizi.

Ricopia ogni espressione su di un foglio; usa la riga per tracciare le linee di frazione.

1. Semplifica.

a) $\frac{a^3+4a}{2a^2b+8b}$ $\frac{ac+2a}{c^2+5c+6}$ $\frac{a^2-b^2}{ab-b^2}$

b) $\frac{12x+72}{12x+96}$ $\frac{x^2+7x+10}{2x+10}$ $\frac{x^2-4}{5x+10}$

c) $\frac{a^2+14a+33}{2a^3+26a^2+44a}$ $\frac{a^2+2a-15}{a^2+3a-10}$ $\frac{y^2+y-20}{yz^2-4z^2}$

2. Calcola e semplifica il risultato.

a) $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-5}=$; $1-\frac{1}{x+1}=$

b) $\frac{a+5}{a}+\frac{a+2}{b}-\frac{a^2+5b}{ab}=$; $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-\frac{x^2+y^2}{xy}=$

c) $1+\frac{1}{a}+\frac{2}{a-1}=$; $\frac{1}{a+1}-\frac{a}{a^2-1}=$

d) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=$; $\frac{1}{x^2+5x+6}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=$

e) $\frac{1}{2p+4}+\frac{3}{p^2+4p+4}-\frac{p}{p^2-4}=$; $\frac{5}{m^2-3m-40}-\frac{8}{m^2-64}=$

f) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{2}{x^2+6x+9}=$; $\frac{y}{y-z}-\frac{2y}{y+z}+\frac{3yz}{z^2-y^2}=$

g) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(c-b)}-\frac{1}{(a-c)(b-c)}=$

3. Calcola. (Ricorda: nelle moltiplicazioni è utile semplificare prima di moltiplicare.)

a) $\frac{5t+10}{t^3}\bullet\frac{t^4}{t+2}=$; $\frac{2x-y}{x^2-y^2}\bullet\frac{x+y}{4x^2-y^2}=$

b) $\frac{3x+6}{5x+5}\bullet\frac{10x+10}{x^2-6x-16}=$; $\frac{c+2}{c^2+8c-9}\bullet\frac{2c+18}{2c^2-8}=$

c) $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}\bullet\frac{a^2-b^2}{a-b}=$; $\frac{3a+15}{a+2}\bullet\frac{a^2-4}{9a-18}=$

d) $\frac{x^2+6x+9}{5x^2-45}\div\frac{x^2+5x+6}{11x+22}=$; $\frac{x^2}{12}\div\frac{4x^3-25x}{6x-15}=$

e) $\left[\frac{x-1}{x^2-4}\bullet\frac{2x+4}{x^2-1}\right]\div\frac{2x+2}{x^2-4x+4}=$; $\left[\frac{t-3}{t^2-2t-3}\bullet\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t-3}\right]\div\frac{t^2-9}{t^2-1}=$

f) $\left[\frac{b-1}{21-4a-a^2}\bullet\frac{b-2}{b-b^3}\right]\div\frac{2-b}{a^2+6a-7}=$; $\left[\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2\bullet\frac{2}{x-1}\right]\div\frac{x^2+2x+1}{x^3}=$

4. Semplifica le seguenti espressioni algebriche.

a) $\left\{\left[(3x-1)^2-4x^2\right](x-1)+10x^2-x(x^2+3)\right\}\div(4x-1)=$

b) $\left(\frac{2x^2-4x}{x^2-4}\bullet\frac{x^2-x-6}{3x+1}-\frac{x(x-1)}{3x+1}\right)\div\frac{x-5}{x}=$

c) $\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{x^2-3}{x^2+x}\right)\div\frac{x^2-4}{x}+\frac{1}{x^2+2x}\right]\bullet(x^3+2x^2+x+2)=$

Soluzioni:

Esercizio 1:

a) $\frac{a}{2b}$ $\quad\frac{a}{c+3}$ $\quad\frac{a+b}{b}$

b) $\frac{x+6}{x+8}$ $\quad\frac{x+2}{2}$ $\quad\frac{x-2}{5}$

c) $\frac{a+3}{2a(a+2)}$ $\quad\frac{a-3}{a-2}$ $\quad\frac{y+5}{z^2}$

Esercizio2:

a) $\frac{3x-8}{(x+2)(x-5)}$ $\quad\frac{x}{x+1}$

b) $\frac{b+2}{b}$ $\quad 0$

c) $\frac{a^2+2a-1}{a(a-1)}$ $\quad\frac{-1}{(a+1)(a-1)}$

d) $\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$ $\quad 0$

e) $\frac{-p^2+2p-16}{2(p+2)^2(p-2)}$ $\quad\frac{-3m}{(m-8)(m+8)(m+5)}$

f) $\frac{x+15}{(x-3)(x+3)^2}$ $\quad\frac{-y^2}{(y-z)(y+z)}$

g) $\frac{2}{(a-b)(a-c)}$

Esercizio 3:

a) $5t$ $\quad\frac{1}{(x-y)(2x+y)}$

b) $\frac{6}{x-8}$ $\quad\frac{1}{(c-1)(c-2)}$

c) 1 $\quad\frac{a+5}{3}$

d) $\frac{11}{5(x-3)}$ $\quad\frac{x}{4(2x+5)}$

e) $\frac{x-2}{(x+1)^2}$ $\quad\frac{(t-1)^3}{(t+1)(t-3)^2(t+3)}$

f) $\frac{-(a-1)}{b(a-3)(b+1)}$ $\quad\frac{2(x-1)}{x}$

Esercizio 4:

a) x^2+1 $\quad$ b) $\frac{x^2}{3x+1}$ $\quad$ c) $\frac{(x+1)(x^2+1)}{x}$