Disequazioni

1 Introduzione: alcuni esempi

$\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} < \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot \frac{2}{3}$

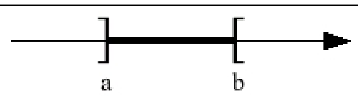
$x^2 + 2x - 5 \geqslant 4x^2 - 8x$

$\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ \frac{5}{4}x - 2 > x + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 2y \leq 3 \\ 5x - 2y \leq 10 \end{cases}$

$\frac{2x-1}{x+\frac{1}{4}} < \frac{1}{x}$

2 Gli intervalli

Disuguaglianza	Intervallo	Rappresentazione grafica
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a;b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a;b[$	
$a < x \leqslant b$	$]a;b]$	
$a < x < b$	$]a;b[$	
$x < b$	$]-\infty;b[$	
$x > b$	$]b;+\infty[$	
$x \leqslant b$	$]-\infty;b]$	
$x \geqslant b$	$[b;+\infty[$	

Esercizio: scrivi ognuno dei seguenti intervalli con la disuguaglianza e rappresentalo sulla retta reale.

Intervallo	Disuguaglianza	Rappresentazione grafica
$[-2;4]$		
$[-4;16[$		
$]-5;10]$		
$]-1;3[$		
$[-1;1[$		
$]0;+1[$		
$]-1;-4]$		
$]-1;2[$		

Esercizio: scrivi i seguenti insiemi sotto forma di intervalli e rappresentali sulla retta dei numeri reali.

$A=\{x\epsilon\mathbb{R}\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$
$B=\{x\epsilon\mathbb{R}\mid -1\leqslant x<3\}$
$C=\{x\epsilon\mathbb{R}\mid x\leqslant 2\}$
$D=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\mid x>\frac{1}{2}\right\}$

2.1 Unione ed intersezione

Poiché gli intervalli sono insiemi di numeri reali, le operazioni insiemistiche di unione e di intersezione sono spesso utili quando si lavora con gli intervalli. Riprendiamo le definizioni di unione e intersezione di insiemi.

Unione: $A \cup B = \{x | x \epsilon A \ o \ x \epsilon B\}$
Intersezione: $A \cap B = \{x | x \epsilon A \ e \ x \epsilon B\}$

Esercizio: dati gli insiemi $A = [-2; 3]$, $B =]1; 6[$ e $C =]4; +1[$, rappresenta sulla retta dei numeri e scrivi, se possibile, come singoli intervalli i seguenti abbinamenti:

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$.

3 Proprietà delle disuguaglianze

Siano a, b, c dei numeri reali. Valgono le seguenti proprietà:

1	se $a < b$ allora $b > a$	
2	se $a < b$ e $b < c$ allora $a < c$	transitiva
3	se $a < b$ allora $a + c < b + c$	proprietà dell'addizione
4	se $a < b$ e $c > 0$ allora $a \times c < b \times c$	proprietà della moltiplicazione
	se $a < b$ e $c < 0$ allora $a \times c > b \times c$	

La quarta proprietà dice in particolare che se moltiplichiamo (dividiamo) per un numero negativo si deve cambiare il segno della disuguaglianza!!!

Disequazioni di primo grado ad un'incognita

Esempi:

$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid 2x + 3 > 3\} =]0; +\infty[$
$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid -x + 8 \geqslant 0\} = ...$
$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid 5x - 10 > 0\} = ...$
$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = ...$

Definizioni:

si dice disequazione ad un'incognita una disequazione della forma $f(x) > g(x)$ oppure $f(x) \geqslant g(x)$ con f e g funzioni reali; $f(x)$ e $g(x)$ si dicono membri della disequazione.

Una disequazione è di primo grado quando le funzioni f e g sono affini.

Risolvere una disequazione significa trovare dei numeri reali che, sostituiti alla x, verificano tale disuguaglianza. Tali numeri si dicono soluzioni della disequazione e formano l'insieme delle soluzioni. Come puoi intuire dagli esempi visti sopra, l'insieme delle soluzioni di una disequazione è un intervallo di valori.

Definizione:

Due disequazioni sono equivalenti quando hanno la stesso insieme delle soluzioni (in uno stesso insieme di definizione che solitamente è $\mathbb{R}$). Usando le proprietà 1. 3. 4. delle disuguaglianze, una disequazione viene trasformata in una disequazione equivalente a sè stessa.

Dunque per risolvere una disequazione:

- utilizza le proprietà 1. 3. 4. e le proprietà delle operazioni in $\mathbb{R}$ per ottenere una disequazione piú semplice ed ancora equivalente e

- continua il processo fino a che hai raggiunto una disequazione la cui soluzione è ovvia.

Esempi:

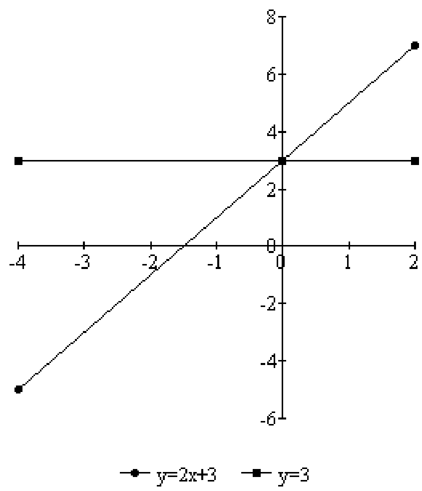
$$\begin{aligned} 2x+3 &> 3 \qquad / -3 \\ 2x+3-3 &> 3-3 \\ 2x &> 0 \qquad / \times \tfrac{1}{2} \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$$-x+8 \leqslant 0$$

$$5x-10 > 0$$

$$5x-10 > 0$$

Esempio: risolviamo graficamente la disequazione $2x+3>3$



x	$2x+3$	3
-4	-5	3
0	3	3
2	7	3

3.1 Esercizi

3.1.1 Esercizio 1: risolvi le seguenti disequazioni, indicando l'insieme delle soluzioni come intervallo

$2(2x+3)-10>6(x-2)$	$S=]-\infty;4[$
$\frac{2x-3}{4}+6\geq 2+\frac{4x}{3}$	$S=]-\infty;\frac{39}{10}]$
$-2-\frac{b}{4}\leq\frac{1+b}{3}$	$S=[-4;+\infty[$
$\frac{y-3}{4}-1>\frac{y}{2}$	$S=]-\infty;-7[$
$\frac{5}{3}x-\frac{x-1}{2}\geq x+\frac{1}{4}$	$S=[-\frac{3}{2};+\infty[$
$\frac{2x}{3}>\frac{23}{24}-\frac{5x}{4}$	$S=]\frac{1}{2};+\infty[$
$\frac{x+5}{6}-\frac{10-x}{-3}<\pi$	$S=]25-6\pi;+\infty[$
$\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}(5-x)\geq 0$	$S=[\frac{45}{19};+\infty[$
$(x-1)(x+1)(x+2)+x^2<(x+1)^3+5$	$S=]-2;+\infty[$
$(2x-3)(3x+1)-2(x-3)(3x+2)-7x<0$	$S=\{\}$
$5x(4x-5)-(5x-3)^2<5x(1-x)$	$S=\ R$
$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(2x-1)^2}{16}\leq\frac{35}{16}$	$S=[0;+\infty[$

3.1.2 Esercizio 2: risolvi graficamente le seguenti disequazioni

$6x+6>4x+10$
$3x-2<5x+4$
$2x+4\leqslant 5x+4$

4 Le disequazioni fratte

In una disequazione fratta non si può procedere com per le equazioni fratte. In particolare è proibito moltiplicare tutta l'equazione per il denominatore comune, proprio perché non se ne conosce il segno globale. La tecnica di risoluzione è quindi piuttosto diversa. Si deve operare in modo da ottenere un sistema del tipo:
$\frac{N(x)}{D(x)}<0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}>0$ oppure ancora i polinomi analoghi con i segni $\leqslant$ e $\geqslant$.
In seguito si procede all'analisi del segno, come esemplificato sotto.

4.1 Esempio

$$\begin{array}{rcll}
\frac{2x+3}{4x+4}-1 & \leqslant & \frac{x-1}{x+1} & \text{Prima di tutto occorre spostare tutto a sinistra} \\
\frac{2x+3}{4x+4}-1-\frac{x-1}{x+1} & \leqslant & 0 & \text{Si trova il denominatore comune e si eseguono le operazioni.} \\
\frac{2x+3-1\cdot(4x+4)-4(x-1)}{4(x+1)} & \leqslant & 0 & \text{Si semplifica.} \\
\frac{-6x+3}{4(x+1)} & \leqslant & 0 & \text{Ora inizia lo studio del segno.}
\end{array}$$

Per studiare i segno si risolvono le equazioni: Numeratore=0 e Denominatore=0.

In questo caso si trova che:

$-6x+3=0$ e quindi $x=\frac{1}{2}$ per il numeratore;

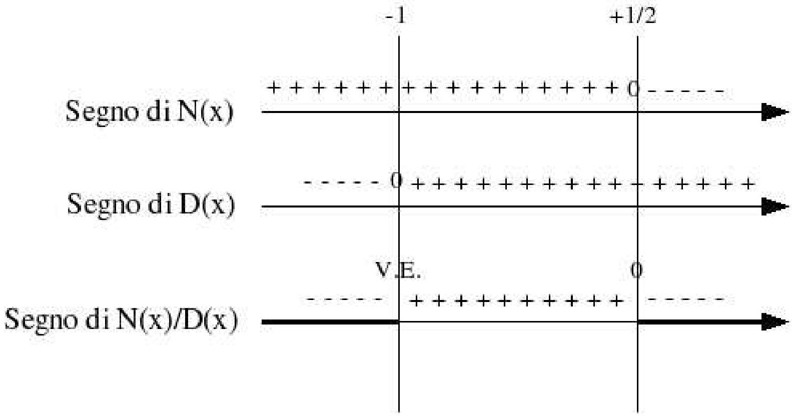
$4(x+1)=0$ e quindi $x=-1$ per il denominatore.

Si riportano i due risultati in un grafico come quello sottostante e si analizzano i segni al di qua e al di là degli zeri, sostituendo con dei valori test.

Nel nostro caso per il numeratore se si inserisce $x=0$ si osserva che il risultato è $-6\cdot 0+3=3$ è positivo, mentre per $x=1$ si ha $-6\cdot +1+3=-3$ un risultato negativo.

Per il denominatore invece si ha per esempio inserendo $x=-2$ il risultato $4(-2+1)=-4$ negativo e per $x=0$ il risultato $4(0+1)=4$ positivo.

Osservate quindi il grafico sottostante:



Applicando le regole dei segni alla divisione $\frac{N}{D}$ si può dedurre, a partire dai segni ottenuti prima anche il segno globale e in tal modo trovare la soluzione alla disequazione fratta; inoltre bisogna stare attenti agli zeri del denominatore che diventano dei valori eccezionali da scartare! In questo esempio si ha la soluzione:

$S=]-\infty;-1[\cup[\frac{1}{2};+\infty[$

Il fatto che il -1 non sia compreso dipende proprio dal fatto che -1 è un valore eccezionale!

4.2 Esercizi

$\frac{x+1}{x}\geqslant 0$	$S=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$
$\frac{3}{2x}\leqslant\frac{1-2x}{6x}$	$S=$
$\frac{1-x}{2x}\geqslant 0$	$S=]0;1]$
$\frac{7}{6}>\frac{4x+2}{x-7}$	$S=$
$\frac{3x-6}{2x+1}\geqslant 0$	$S=]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup[2;+\infty[$
$\frac{5x}{11}-\frac{3}{22}>\frac{15x^2-18}{33x}$	$S=$
$\frac{1}{x}\leq 1$	$S=]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$
$\frac{1}{5}x-\frac{1}{x-5}>\frac{x+1}{5}-\frac{x-1}{x-5}$	$S=$
$\frac{x-3}{3x}+\frac{x}{6}\leqslant\frac{x^2+9}{6x}-\frac{x+3}{x}$	$S=$
$\frac{x-1}{2x}\cdot\frac{1}{2x-2}\leqslant 2$	$S=]-\infty;0[\cup[\frac{1}{8};1[\cup]1;+\infty[$

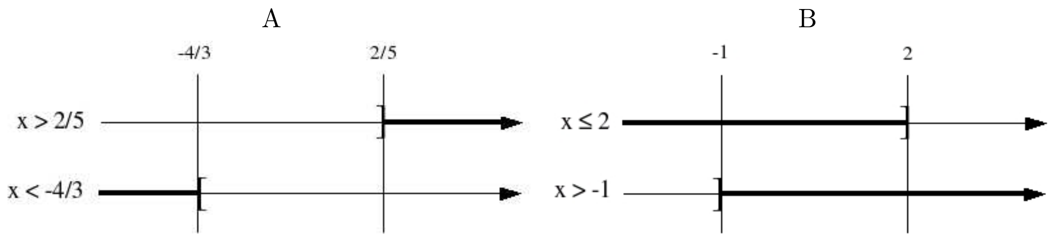
5 I sistemi di disequazioni con una variabile

La soluzione dei sistemi avviene in modo grafico, cosí come è già stato fatto per le disequazioni fratte, con la bella cosa che qui non ci sono problemi di V.E.

5.1 Esempi

Sistema A	Sistema B
$\begin{cases} 3(1-x) < 2x+1 \\ 2x-6 > 5x-2 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{4}{3} + 5x \leqslant \frac{1}{2}x + 11 - \frac{1}{3} \\ \frac{6}{5}x + 1 - x < 2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{10}x \end{cases}$
$\begin{cases} 3-3x < 2x+1 \\ 2x-5x > -2+6 \end{cases}$	$\begin{cases} 9x-8+30x \leqslant 3x+66-2 \\ 12x+10-10x < 20+5x+7x \end{cases}$
$\begin{cases} -3x-2x < 1-3 \\ -3x > 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 39x-3x \leqslant 64+8 \\ 2x-12x < 20-10 \end{cases}$
$\begin{cases} -5x < -2 \\ -3x > 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 36x \leqslant 72 \\ -10x < 10 \end{cases}$
$\begin{cases} 5x > 2 \\ 3x < -4 \end{cases}$	$\begin{cases} x \leqslant \frac{72}{36} \\ 10x > -10 \end{cases}$
$\begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x > -1 \end{cases}$

Ora si passa alla rappresentazione grafica delle due soluzioni e si cercano gli insiemi di soluzioni che soddisfano entrambe le disequazioni. Osserva i grafici e le soluzioni!



$S = \phi$ $\qquad$ $S =]-1; 2]$

5.2 Esercizi

$\begin{cases} x+7-3x \geqslant -x(x+1)+x^2-3-2x \\ 2x+3 < 3 \end{cases}$	$S = [-10; 2[$
$\begin{cases} x-6-x(x-1) > 2-x^2 \\ 2x-1 < 3 \end{cases}$	$S =$
$\begin{cases} \frac{1}{3}(9x+12)-10 > 12 \\ 4x(x-1)+10 < 4x(x+1)-6 \end{cases}$	$S =]6; +\infty[$
$\begin{cases} 7x-1+x(x-3)+6 \leqslant x^2-7x+1 \\ 4x-7 < 8x+2 \end{cases}$	$S =$
$\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6} < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x+x-3 > -(5+x) \end{cases}$	$S =]-\frac{4}{5}; \frac{2}{3}[$

6 Disequazioni di secondo grado normali e fratte

Per le disequazioni si procede risolvendo la relativa equazione di secondo grado; poi si procedo con lo studio del segno per tutti i possibili intervalli. Per quelle fratte si procede come per le disequazioni fratte di primo grado, risolvendo dapprima le relative equazioni e eseguendo poi lo studio del segno.

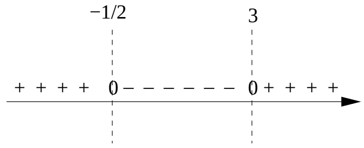
6.1 Esempio 1

$$2x^2 - 5x - 3 > 0$$

Si risolve la relativa equazione:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Le cui soluzioni sono: $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 3$. Si riportano i valori trovati sull‘asse delle x e si studia il segno in ogni settore, come mostrato qui sotto.



Si osserva dunque che la soluzione e: $S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]3; \infty[$

6.2 Esempio 2

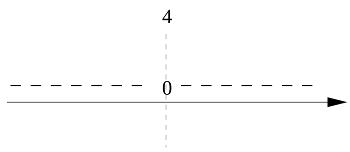
$$-x^2 + 8x > 16$$

Si sposta tutto a sinistra e si risolve la relativa equazione

$$-x^2 + 8x - 16 > 0$$

$$-x^2 + 8x - 16 = 0$$

Che ha le due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = 4$. Si riporta $x = 4$ sull‘asse delle x e si procede con lo studio del segno.



Si nota che la disequazione non e mai soddisfatta in nessun intervallo (il valore deve essere maggiore di 0!) ed e dunque impossibile.

6.3 Esempio 3

$$1 - \frac{1}{x-2} \leqslant \frac{2}{3x-1}$$

Si sposta tutto a sinistra e si trova il denominatore comune

$$1 - \frac{1}{x-2} - \frac{2}{3x-1} \leqslant 0$$
$$\frac{3x^2 - 12x + 7}{(x-2)(3x-1)} \leqslant 0$$

Si risolvono per zero numeratore e denominatore trovando le relative soluzioni

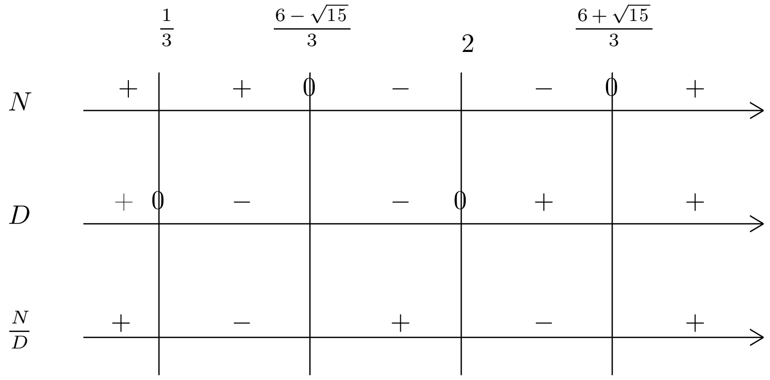
$$3x^2 - 12x + 7 = 0$$

$x_1 = \frac{6-\sqrt{15}}{3}$ e $x_2 = \frac{6+\sqrt{15}}{3}$

$$(x-2)(3x-1) = 0$$

$x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

Si inserisce il tutto opportunamente in uno schema per lo studio del segno



E si conclude quindi che $S =]\frac{1}{3}; \frac{6-\sqrt{15}}{3}] \cup]2; \frac{6+\sqrt{15}}{3}]$

6.4 Esercizi

$x^2+2>0$	$S=\mathbb{R}$	$x^2-x>0$	$S=]-\infty;0[\cup]1;\infty[$
$2x^2+1<0$	$S=\varnothing$	$2x^2+x-1>0$	$S=]-\infty;-1[\cup]\frac{1}{2};\infty[$
$x^2+2x+1>0$	$S=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$2x^2+3x-2\geqslant 0$	$S=]-\infty;-2]\cup[\frac{1}{2};\infty[$
$2x^2+16x+32>0$	$S=\mathbb{R}\backslash\{-4\}$	$5x^2<8x-\frac{16}{5}$	$S=\varnothing$
$\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$	$S=]-4;-1[\cup]-1;6[$	$\frac{x^2}{x^2-4}\geqslant 0$	$S=]-\infty;-2[\cup]2;\infty[\cup\{0\}$
$\frac{x^2-3x+5}{x^2-1}\leqslant 0$	$S=]-1;1[$	$\frac{2x^2+x-1}{x^2-2x}\geqslant 0$	$S=]-\infty;-1]\cup]0;\frac{1}{2}]\cup]2;\infty[$
$\frac{x-5}{x+3}\leqslant\frac{8-x}{3-x}$	$S=]-3;3[\cup[13;\infty[$	$\frac{x}{x+3}-\frac{1}{4}<\frac{x-1}{2x}$	$S=]-3;0[\cup]1;6[$

7 Disequazioni e sistemi di disequazioni di primo e secondo grado a due incognite

I sistemi di disequazioni a due incognite possono essere risolte unicamente con il metodo grafico.

7.1 Disequazioni a due incognite

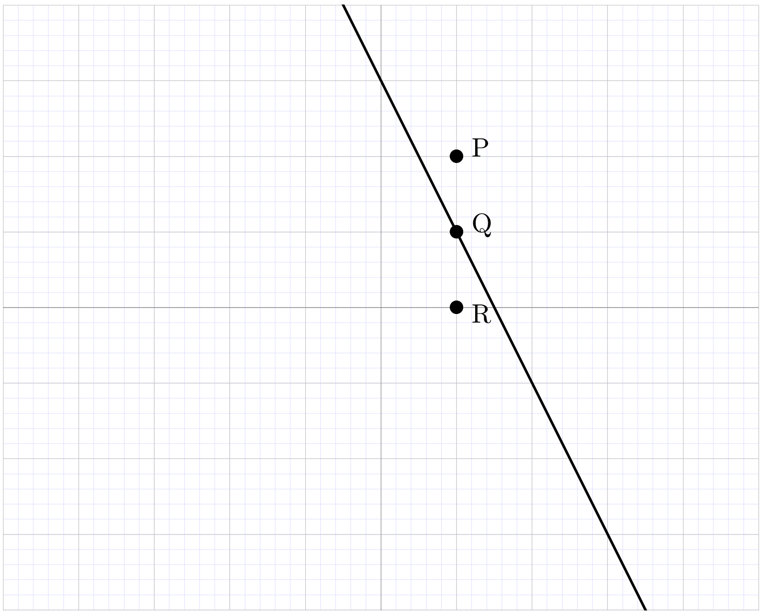
Prendiamo la seguente disequazione a due incognite

$$2x + y \geqslant 3$$

Si trasforma la disequazione in modo da poterla rappresentare come funzione

$$y \geqslant -2x + 3$$

Consideriamo la retta $y = -2x + 3$; divide il piano in due parti. Da una parte avremo i punti $(x; y)$ per i quali vale $y > -2x + 3$ e dall'altra quelli per cui $y < -2x + 3$, mentre sulla retta avremo i punti per cui $y = -2x + 3$. Si ottiene la seguente rappresentazione grafica



Scegliendo dei punti nel piano e mantenendo fissa la x, è facile dedurre in quale metà del piano vale $y \geqslant -2x+3$. Vedi i punti $P\,Q$ e R.

Ci sono quattro casi da disegnare:

a)$y \geqslant -2x+3$	b)$y > -2x+3$	c)$y \leqslant -2x+3$	d)$y < -2x+3$

Nel caso in cui la disuguaglianza è di tipo " $\geqslant o \leqslant$ " anche i punti sulla retta fanno parte della soluzione e la retta viene rappresentata con una linea continua. Negli altri casi la retta non fa parte dell'insieme delle soluzioni e viene rappresentata con una retta tratteggiata.

7.1.1 Esercizi

Rappresenta graficamente le soluzioni delle seguenti disequazioni a due incognite.

a)$3x-4y \leqslant 12$	b)$2x+3y < 6$	c)$y > -3$
d)$2x \leqslant 5$	e)$y \leqslant 2$	f)$3x > -8$

7.2 Sistemi di disequazioni a due incognite

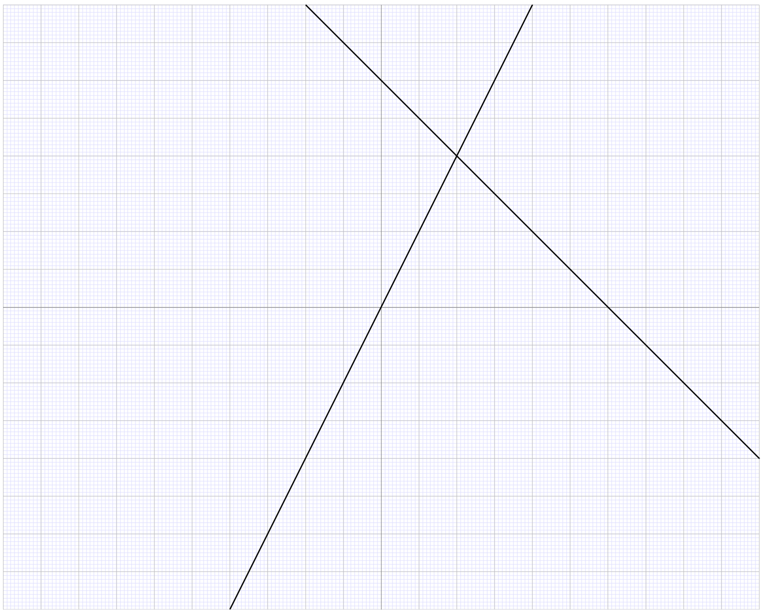
I sistemi di disequazioni a due incognite si risolvono trovando le intersezioni tra gli insiemi delle soluzioni delle varie disequazioni che lo compongono. Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} x+y \geqslant 6 \\ 2x-y \geqslant 0 \end{cases}$$

Lo trasformiamo nel sistema equivalente qui sotto indicato per poter procedere alla rappresentazione grafica

$$\begin{cases} y \geqslant -x+6 \\ y \leqslant 2x \end{cases}$$

Si rappresentano le due disequazioni sul piano cartesiano. La soluzione è data dalla regione in comune ai due semipiani soluzioni delle singole disequazioni, perché i punti $(x; y)$ che sono soluzione del sistema devono risolvere sia la prima, sia la seconda disequazione contemporaneamente.



Indica la corretta area del piano che rappresenta la soluzione!

7.2.1 Esercizi

Risolvi graficamente i seguenti sistemi di disequazioni

a) $\begin{cases} 3x + y \leqslant 21 \\ x - 2y \leqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y \leqslant 22 \\ x + y \leqslant 13 \\ 2x + 5y \leqslant 50 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y \geqslant 20 \\ x + y \geqslant 12 \\ x + 3y \geqslant 18 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

La soluzione del sistema b è una regione con la forma di un poligono. Determina algebricamente le coordinate dei vertici del poligono. Si osservi inoltre come la soluzione del sistema b è chiusa mentre quella del sistema c non lo è.

Problema 1. Una ditta produttrice di tavole da surf produce due modelli, uno standard e uno da competizione. Ogni tavola standard richiede 6 ore di lavoro per la fabbricazione e 1 ora di lavoro per la finitura. Ogni tavola da competizione richiede invece 8 ore di lavoro per la fabbricazione e 3 ore di lavoro per la finitura. Il reparto di fabbricazione ah disposizione al massimo 120 ore di lavoro per settimana, mentre quello per la finitura 30 ore. Quale combinazione di tavole può essere prodotta ogni settimana per non eccedere nelle ore di lavoro settimanali nei due reparti?

Problema 2. Una fabbrica di sci produce due tipi di sci: i carving e quelli normali. Per produrre un paio carving occorrono 6 ore di fabbricazione e 1 ora per la finitura. Gli sci normali richiedono invece 4 ore di lavoro per la fabbricazione e 1 ora per la finitura. Giornalmente sono disponibili 108 ore di lavoro per la fabbriaczione e 24 per la fninitura. Quale combinazione di sci7carving può essere prodotta senza eccedere nelle ore giornaliere dei due reparti?

Problema 3. Sociology. A city council voted to conduct a study on Inner-city community problems. A nearby University was contacted to provide sociologists and reserach assistants. Each sociologist will spend 10 hours per week collecting data in the field and 30 hour per week analyzing data in the research center. Each research assistant will spend 30 hours per week in the field and 10 hour per week in the research center. The minimum weekly labor - hour requirement are 280 hours in the field and 260 hour in the research center. If x is the number of sociologist hired for the study, write a system of linear inequalities that indicates appropriate restrictions on x and y. Find the set of feasible solutions graphically.

Risolvi graficamente i seguenti sistemi di disequazioni:

a) $\begin{cases} 2x+y\leqslant 12 \\ x+y\leqslant 7 \\ x+2y\leqslant 10 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 3x+y\leqslant 21 \\ x+y\leqslant 9 \\ x+3y\leqslant 21 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x+2y\geqslant 16 \\ x+y\geqslant 12 \\ 2x+y\geqslant 14 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 3x+y\geqslant 30 \\ x+y\geqslant 16 \\ x+3y\geqslant 24 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$	e) $\begin{cases} x+y\leqslant 11 \\ 5x+y\geqslant 15 \\ x+2y\geqslant 12 \end{cases}$